

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Ασκ 1) Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5z = 0$$

ΛΥΣΗ

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 5z - 5 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 5(z-1) = 0 \quad \textcircled{1}$$

Μεταφορά αξόνων

$$\begin{array}{l|l} \text{Θέτω} & x-1 = x' \\ & y-2 = y' \\ & z-1 = z' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = x' + 1 \\ y = y' + 2 \\ z = z' + 1 \end{array}$$

Άρα, στην $\textcircled{1}$ είναι:

$$(x'+1-1)^2 + (y'+2-2)^2 + 5(z'+1-1) = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + 5z' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = -5z' \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{Θέτω} & x' = x'' \\ & y' = y'' \\ & z' = -z'' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \textcircled{2} \cdot x''^2 + y''^2 = 5z'' \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x''^2}{5/2} + \frac{y''^2}{5/2} = 2z'' \end{array}$$

Είναι ελλειπτικό παραβολοειδές

δίου είναι σε μορφή:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p \geq q > 0$$

(ΑΣΚ 2) Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας

με κορυφή το $K(1, -2, 1)$ και οδηγό των

$$(\gamma): \begin{cases} x^2 - y + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$(\varepsilon): \frac{x-1}{k} = \frac{y+1}{\lambda} = \frac{z-1}{\mu} \quad \text{με } \vec{\alpha} = (k, \lambda, \mu) \parallel (\varepsilon)$$

$$\text{Ορίζω } (\varepsilon) = t \Rightarrow \begin{cases} x = kt + 1 \\ y = \lambda t - 1 \\ z = \mu t + 1 \end{cases}$$

$$\text{έφα } (\gamma): \begin{cases} (kt+1)^2 - (\lambda t - 1) + 2 = 0 \quad \textcircled{1} \\ \mu t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{\mu} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \rightsquigarrow \left(-\frac{k}{\mu} + 1\right)^2 - \left(-\frac{\lambda}{\mu} - 1\right) + 2 = 0$$

$$\text{όπου, } \frac{k}{\mu} = \frac{x-1}{z-1} \quad \text{και} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{y+1}{z-1}$$

$$\textcircled{1} \rightsquigarrow \left(-\frac{(x-1)}{z-1} + 1\right)^2 - \left(-\frac{(y+1)}{z-1} - 1\right) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-x}{z-1} + 1\right)^2 + \frac{y+1}{z-1} - 1 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(z-x)^2}{(z-1)^2} + \frac{y+z+2}{z-1} + \frac{2(z-1)}{z-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z-x)^2 + (z-1)(y+z+2) + 2(z-1)^2 = 0$$

(ΑΕΚ.3)

Να βρεθεί η εξίσωση κυλινδρικής επιφάνειας

με γενεσική παράλληλη στο $\vec{k} = (1, 1, 2)$

και οδηγό των (γ) - $\begin{cases} xy = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

$$(\varepsilon): \frac{x-k}{1} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z-\mu}{2} = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = x - t \\ \lambda = y - t \\ \mu = z - 2t \end{cases} \quad \text{ω} \quad A(k, \lambda, \mu) \in (\gamma)$$

$$\text{οπ} \quad \begin{cases} k \cdot \lambda = 1 \Rightarrow (x-t)(y-t) = 1 \quad (1) \\ \mu = 0 \Rightarrow z - 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{z}{2} \end{cases}$$

$$(1) \xrightarrow{\text{ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ}} \left(x - \frac{z}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{z}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x - z) \cdot (2y - z) = 2.$$